****

**ทฤษฎีกราฟ**

**สมาชิก**

**นายกิตติกานต์ เอียดใหญ่ รหัส 6604101306 เลขที่ 6**

**นายธนพัทร บุญผัด รหัส 6604101330 เลขที่ 27**

**นายธนภัทร ตาสาย รหัส 6604101331 เลขที่ 28**

**นายธนวัฒน์ ศรีลาคำ รหัส 6604101332 เลขที่ 29**

**นายธนวัตร ศิริเทศ รหัส 6604101333 เลขที่ 30**

**นางสาวธมลวรรณ ใจเป็ง รหัส 6604101334 เลขที่ 31**

**นางสาวนิศารัตน์ นันติ รหัส 6604101343 เลขที่ 40**

**นายพงศกร ทนานนท์ รหัส 6604101353 เลขที่ 50**

**นายภีรภัทร์ ขอดแก้ว รหัส 6604101368 เลขที่ 65**

**นายศุปวิทย์ วงศ์สุภา รหัส 6604101384 เลขที่ 80**

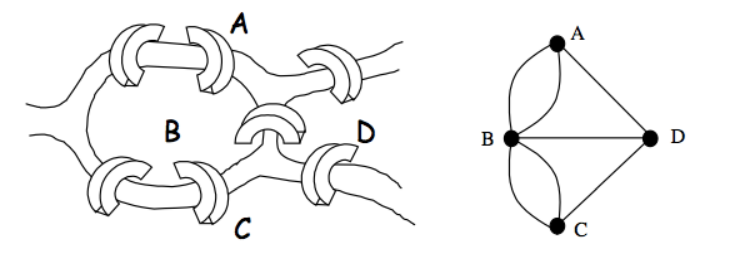
**นายสิธินนท์ รหัส 6604101388 เลขที่ 84**

**นายปราวิต ประภาวรารัตน์ รหัส 6604101408 เลขที่ 102**

**ทฤษฎีกราฟ**

**วัตถุประสงค์**

1. เข้าใจนิยามของกราฟประเภทต่างๆ และนิยามที่เกี่ยวข้อง
2. เข้าใจทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกราฟและสามารถนำไปใช้ได้
3. เข้าใจวิธีการแทนกราฟด้วยเมตริกซประชิด

ทฤษฎีกราฟนั้น มีจุดเริ่มจากผลงานตีพิมพ์ของ [เลออนฮาร์ด ออยเลอร์](https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B9%80%E0%B8%A5%E0%B8%AD%E0%B8%AD%E0%B8%99%E0%B8%AE%E0%B8%B2%E0%B8%A3%E0%B9%8C%E0%B8%94_%E0%B8%AD%E0%B8%AD%E0%B8%A2%E0%B9%80%E0%B8%A5%E0%B8%AD%E0%B8%A3%E0%B9%8C) ภายใต้ชื่อ Solutio problematis   
 ad geometriam situs pertinentis ในปี ค.ศ. 1736 ([พ.ศ. 2279](https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%9E.%E0%B8%A8._2279)) หรือที่รู้จักกันในนาม [ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก](https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%9B%E0%B8%B1%E0%B8%8D%E0%B8%AB%E0%B8%B2%E0%B8%AA%E0%B8%B0%E0%B8%9E%E0%B8%B2%E0%B8%99%E0%B8%97%E0%B8%B1%E0%B9%89%E0%B8%87%E0%B9%80%E0%B8%88%E0%B9%87%E0%B8%94%E0%B9%81%E0%B8%AB%E0%B9%88%E0%B8%87%E0%B9%80%E0%B8%A1%E0%B8%B7%E0%B8%AD%E0%B8%87%E0%B9%82%E0%B8%84%E0%B8%99%E0%B8%B4%E0%B8%81%E0%B8%AA%E0%B9%8C%E0%B9%80%E0%B8%9A%E0%B8%B4%E0%B8%A3%E0%B9%8C%E0%B8%81) (Seven Bridges of Königsberg) เขาสนใจวิธีที่จะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่งนี้ โดยข้ามแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้น (ซึ่งออยเลอร์ได้ตีพิมพ์ผลงานที่แสดงให้เห็นว่าเป็นไปไม่ได้) ดังรูป

รูปภาพ ที่ 1.1 [ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก](https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%9B%E0%B8%B1%E0%B8%8D%E0%B8%AB%E0%B8%B2%E0%B8%AA%E0%B8%B0%E0%B8%9E%E0%B8%B2%E0%B8%99%E0%B8%97%E0%B8%B1%E0%B9%89%E0%B8%87%E0%B9%80%E0%B8%88%E0%B9%87%E0%B8%94%E0%B9%81%E0%B8%AB%E0%B9%88%E0%B8%87%E0%B9%80%E0%B8%A1%E0%B8%B7%E0%B8%AD%E0%B8%87%E0%B9%82%E0%B8%84%E0%B8%99%E0%B8%B4%E0%B8%81%E0%B8%AA%E0%B9%8C%E0%B9%80%E0%B8%9A%E0%B8%B4%E0%B8%A3%E0%B9%8C%E0%B8%81) (Seven Bridges of Königsberg)

**4.1 การนำกราฟไปใช้งาน**

1. ใช้ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล

2. ใช้ในการแสดงแผนที่รถไฟ

3. ใช้วิเคราะห์ข้อมูลเชิงธุรกิจ

**4.2 บทนิยามกราฟ**

กราฟใดๆประกอบด้วย เซตของ จุดยอด (Vertex; Vertices) ที่ไม่เป็นเซตว่างและเซตของเส้นเชื่อม (Edge) ที่เชื่อมต่อระหว่างจุดยอดเหล่านั้น เขียน แทนด้วย G = (V,E)

**ตัวอย่าง**

G1=(V,E) โดยที่ V={D,E,F} E={จ,ฉ}

**จ**

**D**

**E**

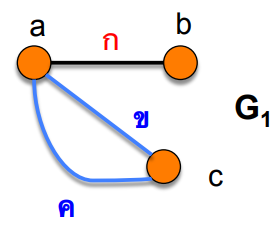
**ฉ**

**หมายเหตุ** V คือจุดยอด และ E คือ เส้นเชื่อม

**F**

**นิยาม : เส้นเชื่อมขนาน**

ระหว่างจุดยอดสองจุดใดๆ บนกราฟ G เรียกได้ว่ามีเส้นเชื่อม ขนานก็ต่อเมื่อระหว่างจุดยอดสองจุดนั้นมีเส้นเชื่อมมากว่า 1 เส้นเส้นเชื่อม ข และ ค คือเส้นเชื่อมที่ขนานกัน

G1 = (V, E) โดยที่

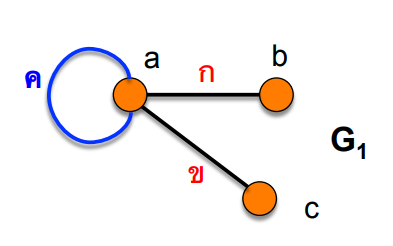
V = {a, b, c}

E = {ก , ข, ค }

รูปภาพ ที่ 2.1 กราฟเส้นเชื่อมขนาน

**นิยาม : วงวน**

เส้นเชื่อมที่มีจุดยอดเป็นจุดเดียวกันเรียกว่า วงวน หรือ ลูปเส้นเชื่อม ค คือเส้นเชื่อมที่เรียกว่า วงวน หรือ ลูป โดยเชื่อมระหว่างจุด ยอด a กับจุดยอด a

G1 = (V, E) โดยที่

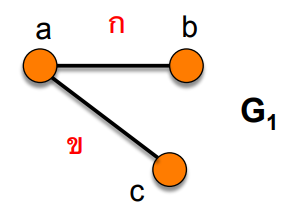
V = {a, b, c}

E = {ก , ข, ค }

รูปภาพ ที่ 2.2 กราฟวงวน

**นิยาม : ดีกรี**

ดีกรีของจุดยอดใดๆ คือ จำนวนเส้นเชื่อม ที่เชื่อมต่ออยู่กับจุดยอดนั้นๆ ดีกรีของจุดยอด a ใดๆ เขียนแทนด้วย deg(a) G1 = (V, E)

โดยที่ดีกรีของแต่ละจุดยอดคือ

deg(a) = 2

deg(b) = 1

deg(c) = 1

รูปภาพ ที่ 2.3 กราฟแสดงเส้นดีกรี

**ประเภทของกราฟ**

แบ่งตามลักษณะของเส้นเชื่อม

กราฟไม่ระบุทิศทาง (Undirected Graph)

กราฟระบุทิศทาง (Directed Graph : Digraph)

แบ่งตามลักษณะโดยรวมของกราฟ

นิยาม : กราฟเชิงเดี่ยว (Simple Graph)

นิยาม : กราฟหลายทาง (Multi Graph)

นิยาม : กราฟเทียม (Pseudo Graph)

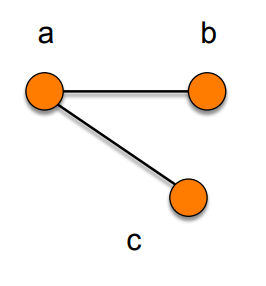
นิยาม : กราฟสมบูรณ์ (Complete Graph)

**แบ่งตามลักษณะของเส้นเชื่อม**

กราฟไม่ระบุทิศทาง (Undirected Graph)

ลำดับของจุดยอดภายในคู่อันดับที่แสดงแทนเส้นเชื่อมไม่มีความสำคัญ

หมายถึง เส้นเชื่อม (a, b) มีค่าเท่ากับ (b, a)

****ในรูปจะแทนเส้นเชื่อมด้วยเส้นที่ไม่มีลูกศร

**G = (V, E) โดยที่**

**V = {a, b, c}**

**E = {(a, b) , (a, c)} หรือ**

**E = {(b, a) , (c, a)} เป็นต้น**

รูปภาพ ที่ 2.4 กราฟไม่ระบุทิศทาง

**ทฤษฎีบท**

**สำหรับกราฟไม่ระบุทิศทาง**

G = (V, E) ใดๆ ผลรวมของดีกรีทุกๆ จุดยอดในกราฟ จะเป็น 2 เท่าของ จำนวนเส้นเชื่อม นั่นคือ

2|E| = ∑ deg(a) โดยที่ a เป็นสมาชิกของ V

G1 = (V, E) โดยที่ |E| = 2

ก

b

a

deg(a) = 2

G1

deg(b) = 1

ข

deg(c) = 1

c

ผลรวมของดีกรีทั้งหมด = 2+1+1 = 4

รูปภาพ ที่ 2.5 กราฟไม่ระบุทิศทาง

ได้ว่า 2\*|E| = 4 เท่ากับ ผลรวมของดีกรีทั้งหมด

**กราฟระบุทิศทาง (Directed Graph :Digraph)**

ลำดับของจุดยอดภายในคู่อันดับที่แสดงแทนเส้นเชื่อมความสำคัญหมายถึง เส้นเชื่อม (a, b) มีค่าไม่เท่ากับ (b, a)

โดย (a, b) แทน เส้นเชื่อมที่มีทิศทางจาก จุดยอด a ไปยังจุดยอด b

(b, a) แทน เส้นเชื่อมที่มีทิศทางจาก จุดยอด b ไปยังจุดยอด a

G1 = (V1, E1) โดยที่ V1 = {a, b, c} E1 = {(a, b) , (a, c)} G2 = (V2, E2) โดยที่ V2 = {a, b, c} E2 = {(b, a) , (c, a)}

b

a

b

a

G22

G1

c

c

**นิยาม**

ดีกรีเข้า (In-Degree) ของจุดยอด a ใดๆ ในกราฟระบุทิศทาง หมายถึง จำนวนเส้นเชื่อม ที่มี a เปนสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

ดีกรีออก (Out-Degree) ของจุดยอด a ใดๆ ในกราฟระบุทิศทาง หมายถึง จำนวนเส้นเชื่อม ที่มี a เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ

G1 = (V1, E1) โดยที่ โดยที่ V1 = {a, b, c}

และ E1 = {(a, b) , (a,c)}

G1

a

b

c

แบ่งตามลักษณะโดยรวมของกราฟ

**นิยาม : กราฟเชิงเดียว (Simple Graph)**

**นิยาม : กราฟหลายทาง (Multi Graph)**

**นิยาม : กราฟเทียม (Pseudo Graph)**

**นิยาม : กราฟสมบูรณ์ (Complete Graph)**

**นิยาม : กราฟเชิงเดียว (Simple Graph)**

นิยาม : กราฟเชิงเดียว (กราฟอย่างง่าย : Simple Graph) เรียกกราฟ G = (V, E) ว่ากราฟเชิงเดียว หรือ กราฟอย่างง่าย ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และไม่มีวงวน

ตัวอย่างกราฟเชิงเดี่ยว

b

a

e

d

c

f

G

a

b

c

d

e

V(G) = {a,b,c,d,e,f,g} V(G) = {a,b,c,d,e}

|V(G)| = 7 |V(G)| = 5

E(G) = {ab,ac,ad,bd,be,ce} E(G) = {ab,bc,cd,de}

|E(G)| = 6 |E(G)| = 4

**กราฟหลายทาง (Multi Graph)**

**คือ** กราฟที่มีวงวน หรือมีเส้นเชื่อมขนาน

**นิยาม** : กราฟหลายทาง (Multi Graph) เรียกกราฟ G = (V, E) ว่ากราฟหลายทางก็ต่อเมื่อ G เป็น กราฟที่มุมเส้นเชื่อมขนานสำหรับบางคู่ของจุดยอด

a

b

c

d

V(G) = {a,b,c,d}

|V(G)| = 4

E(G) = {ab,ab,ad,bc,cd,dd}

|E(G)| = 6

**กราฟเทียม (Pseudo Graph)**

**คือ** กราฟที่ไม่ระบุทิศทาง, มีเส้นเชื่อมพหุ, มีการวนซ้ำ

**นิยาม** : กราฟเทียม (Pseudo Graph) เรียกกราฟ G = (V, E) วากราฟเทียมก็ต่อเมือ G เป็นกราฟที่มีเส้น เชื่อมขนานสำหรับบางคู่ของจุดยอด หรือมีวังวนสำหรับบางจุดยอด (ดังนั้น กราฟหลายทางทกกราฟเป็นกราฟเทียม)

**กราฟสมบูรณ์ ( Complete graph )**

**คือ** กราฟที่ทุกคู่ของจุดยอดถูกเชื่อมต่อด้วยเส้น เป็นกราฟสม่ำเสมอที่มีระดับชั้น กราฟสมบูรณ์บนจุดยอด จุดใช้สัญลักษณ์ มี จุดยอด, และ เส้นเชื่อม

**นิยาม** : กราฟสมบูรณ์ก็เป็นลักษณะเดียวกับกราฟ ต่างกันที่เส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะถูกแทนด้วยเส้นเชื่อมระบุทิศทาง 2 เส้น ในทิศทางตรงกันข้าม

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**เมตริกซ์ประชิด ( Adjacency matrix )**

**คือ** โครงสร้างของกราฟเป็นโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยโหนด และเส้นเชื่อมต่อที่บอกถึงเส้นทางของการเดินทาง หรือความสัมพันธ์ในทิศทางซึ่งสามารถนำมาแทนความสัมพันธ์นั้นด้วยเมตริกซ์ได้ด้วยการกำหนดเมตริกซ์

**นิยาม :** เมตริกซ์ประชิดจะใช้เวกเตอร์ (อาร์เรย์หนึ่งมิติ) เพื่อจัดเก็บเวอร์เท็กซ์และใช้เมตริกซ์(อาร์เรย์สองมิติ) เพื่อจัดเก็บเอดจ์ ถ้าหากเวอร์เท็ฏซ์คู่หนึ่งอยู่ประชิดกันและมีเอดจ์เชื่อมโยงระหว่างเวอร์เท็กซ์คู่นั้น เมตริกซ์คู่นั้นจะมีค่าเป็น 1 ในขณะที่หากไม่มีเอดจ์เชื่อมโยงนั่นหมายถึงไม่มีเส้นทางระหว่างกัน เมตริกซ์คู่นั้นก็จะถูกกำหนดให้ มีค่าเท่ากับ 0 ในกรณีเป็นกราฟแบบมีทิศทางหรือไดกราฟ เมตริกซ์ประชิดจะมีลูกศรเป็นตัวกำหนดทิศทาง

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
| **A** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **B** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **C** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **D** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **E** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **F** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

|  |
| --- |
| A |
| B |
| C |
| D |
| E |
| F |

F

D

C

B

E

A

โจทย์ข้อสอบคณิตศาสตร์ดีสครีต 10 ข้อ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ

1.ข้อใดต่อไปนี้คือกราฟเชิงเดี่ยว

A

B

C

A

B

C

A. B.

A

B

C

A

B

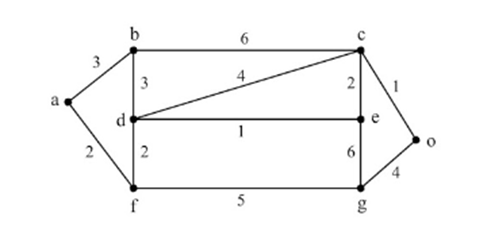
C

C D.

2.จงหาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่กราฟจะมีดีกรีของจุดต่างๆดังนี้ 1, 1, 4, 4 และ 6 ถ้าเป็นไปได้จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนี้

3. กราฟ G มี 14 จุดยอดและมี 27 เส้นเชื่อม โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ G ได้แก่ 3, 4, 5 ซึ่งมี 6 จุดยอด ที่ดีกรีเท่ากับ 4 จงหาว่าจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 และ ดีกรีเท่ากับ 5 มีอย่างละกี่จุด

4. กำหนดกราฟแสดงเส้นทางที่นายศรราม ขับรถออกจากบ้าน (a) ไปยังที่ทำงาน (o) โดย ให้จุดยอดแทนแยกของถนน เส้นเชื่อมแทนระยะทาง ระหว่างทางแยกเป็นกิโลเมตร นายศรรามต้องการหาเส้นทางที่ทำให้เขาไปทำงานโดยเสียค่าใช้จ่ายให้น้อยที่สุด (ระยะทางทั้นที่สุด) จงหาเส้นทางที่เขาจะขับผ่าน



รูปภาพที่ 4.1 รูปแสดงเส้นทางและจุดยอดแต่ละจุดของโจทย์ข้อ 4

5.ข้อใดต่อไปนี้คือกราฟวงวน

A

B

C

A

B

C

A. B.

A

B

C

A

B

C

C D.

6.ให้ G เป็นกราฟ ซึ่งประกอบด้วยเซตของจุดยอด V และเซตของเส้นเชื่อม E ดังนี้

V = {A, B, C, D, E} , E = {AB, AC, AD, BC, DE} จงเขียนกราฟ G

7.จงเขียน จำนวนจุดยอด และ เส้นเชื่อมทั้งหมดของรูปปภาพนี้

a

f

c

b

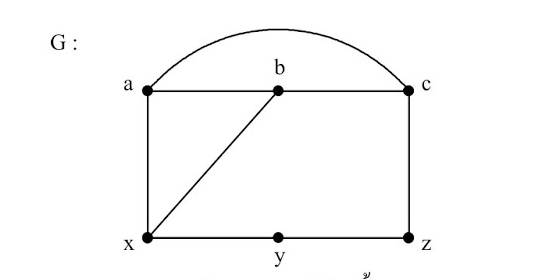
g

e

d

8.กราฟ H มีจุดยอด 12 จุด และมีเส้นเชื่อม 31 เส้น โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ H มี 2 แบบ คือ 4,6 จงหาว่าจำนวนของขุดยอดใดที่มีดีกรีเท่ากับ 4

9.จากกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาว่าข้อใดคือวิถีจาก a ไป z



A. b, c, z, a B. z, y, a, x

C. a, b, x, D. a, b, x, y, z

10.ข้อใดต่อไปนี้คือกราฟหลายเชิง

A

B

C

A. B. ข้อ C และ D ถูก

A

B

C

A

B

C

C D.

เฉลย โจทย์ข้อสอบคณิตศาสตร์ดีสครีต 10 ข้อ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ

1.ข้อใดต่อไปนี้คือกราฟเชิงเดี่ยว

A

B

C

A

B

C

A. B.

A

B

C

A

B

C

C D.

2.จงหาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่กราฟจะมีดีกรีของจุดต่างๆดังนี้ 1, 1, 4, 4 และ 6 ถ้าเป็นไปได้จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนี้

ตอบ เป็นไปได้ เพราะ กราฟมีจุดคี่จำนวนคู่จุด (2 จุด)

และจากผลรวมของดีกรีของทุกจุดในกราฟ = 2 จำนวนเส้นเชื่อม

1+1+4+4+6 = 2n

N = 8

3. กราฟ G มี 14 จุดยอดและมี 27 เส้นเชื่อม โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ G ได้แก่ 3, 4, 5 ซึ่งมี 6 จุดยอด ที่ดีกรีเท่ากับ 4 จงหาว่าจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 และ ดีกรีเท่ากับ 5 มีอย่างละกี่จุด

เฉลย วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 3

จาก ผลรวมของดีกรีของทุกจุดบนกราฟ G = สองเท่าของจำนวนเส้นในกราฟ G

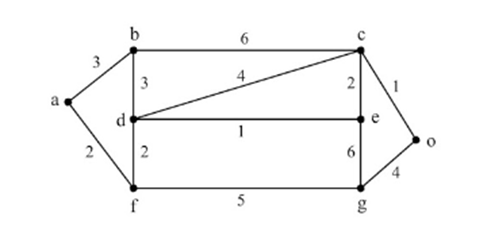
3 ∙ x + 4 ∙ 6 +5 ∙ (8 - x) = 2x 27

3x+24+40 – 5x = 54

-2x = -10

X = 5

ดังนั้น จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 คือ 5 และ จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 5 คือ 3

4. กำหนดกราฟแสดงเส้นทางที่นายศรราม ขับรถออกจากบ้าน (a) ไปยังที่ทำงาน (o) โดย ให้จุดยอดแทนแยกของถนน เส้นเชื่อมแทนระยะทาง ระหว่างทางแยกเป็นกิโลเมตร นายศรรามต้องการหาเส้นทางที่ทำให้เขาไปทำงานโดยเสียค่าใช้จ่ายให้น้อยที่สุด (ระยะทางทั้นที่สุด) จงหาเส้นทางที่เขาจะขับผ่าน

รูปภาพที่ 4.1 รูปแสดงเส้นทางและจุดยอดแต่ละจุดของโจทย์ข้อ 4

ตอบ เส้นทางที่สั้นที่สุดคือ a, f, d, e, c, o

ที่มารูป [https://shorturl.asia/UKY8P](https://www.shorturl.asia/UKY8P)

ระยะทางเท่ากับ 8 (2+2+1+2+1)กิโลเมตร

5.ข้อใดต่อไปนี้คือกราฟวงวน

A

B

C

A

B

C

A. B.

A

B

C

A

B

C

C. D.

6.ให้ G เป็นกราฟ ซึ่งประกอบด้วยเซตของจุดยอด V และเซตของเส้นเชื่อม E ดังนี้

V = {A, B, C, D, E} E = {AB, AC, AD, BC, DE} จงเขียนกราฟ G

วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 5 จุด และเส้นเชื่อม 5 เส้น และมีลักษณะดังนี้

B

A

DE

AD

AC

BC

AB

C

D

E

7.จงเขียน จำนวนจุดยอด และ เส้นเชื่อมทั้งหมดของรูปปภาพนี้

a

f

c

b

g

e

d

วิธีทำ V(G) = {a,b,c,d,e,f,g}

|V(G)| = 7

E(G) = {ac,bc,be,bg,cf,ce,eg}

|E(G)| = 7

8.กราฟ H มีจุดยอด 12 จุด และมีเส้นเชื่อม 31 เส้น โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ H มี 2 แบบ คือ 4,6 จงหาว่าจำนวนของขุดยอดใดที่มีดีกรีเท่ากับ 4

A. 5 B. 6

C. 7 D. 8

ข้อ A เฉลย :

ให้ x เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 4

จาก ผลรวมของดีกรีของทุกจุดบนกราฟ G = สองเท่าของจำนวนเส้นในกราฟ G

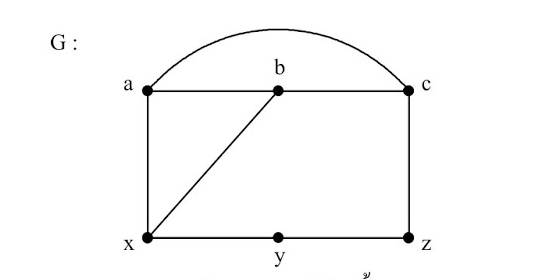
6 ∙ (2 - x) ∙ 4+x = 2.31

72-2x = 62

X = 5

9.จากกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาว่าข้อใดคือวิถีจาก a ไป z

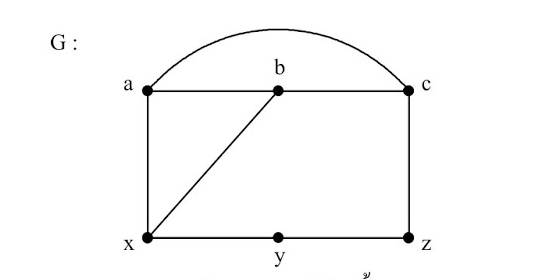
ที่มารูปภาพ<https://shorturl.asia/ZtcLY>



A. b, c, z, a B. z, y, a, x

C. a, b, x, D. a, b, x, y, z

เฉลย: ตอบข้อ D คือวิถีที่ลากจากจุด a ไป z



b

a

z

y

x

10.ข้อใดต่อไปนี้คือกราฟหลายเชิง

A

B

C

A. B. ข้อ C และ D ถูก

A

B

C

A

B

C

C D.